

FreeFem++による超伝導体内の電磁現象の有限要素法を用いた数値解析

07232011 木内研究室 梅林 洋

1. 背景と目的

解析的に解くことが難しい偏微分方程式の近似解を得るために、有効な手段の一つである有限要素法を用いて、超伝導体内の電磁現象の計算が行われてきている。しかし、手計算で行うには要素の面積や体積を求めるためにガウスの積分など座標変換を必要とする手法を用いるため複雑で難解である。そのため、有限要素法を用いるには市販のソフトウェアを利用する、もしくはプログラムを自ら作成する必要がある。市販のソフトウェアは高額であり、研究に必要とする考えを組み合わせることや、必要とするパラメータを取り出そうとすると困難なことが多い。一方で自作によるプログラムは豊富な経験と知識を必要とし、気軽に作れるものではない。

FreeFem++とは C++風の言語を用いて、境界形状、偏微分方程式、境界条件、出力の方法を記述するだけで、メッシュの作成、有限要素法の計算、結果のプロットやファイルへの出力を行えるフリーのソフトウェアである。本研究では超伝導体特有の電流-電圧特性の強い非線形性を FreeFem++に組み合わせることによって超伝導体のモデルを作成し、超伝導体内の電磁現象の有限要素法を用いた数値解析を行えることを目的とする。

2. 解析方法

円筒超伝導体の周囲に電流を流したモデルについて電磁界解析を行う。数値解析対象のモデリングは、ベクトルポテンシャル A と、スカラーポテンシャル ϕ を用いた $A-\phi$ に基づいて行う。また、円柱座標系において、 z 軸を中心軸として θ 方向は一様であると仮定して考える軸対称場を用いる。ただし、FreeFem++では二、三次元場は解けるが、より汎用性の高い軸対称三次元場は実装されていない。これについては軸対称三次元場の支配方程式を弱形式に変換することで実現することが可能である。

超伝導体の抵抗は完全に 0 ではなく、電流密度が臨界電流密度 J_c に近づくにつれてゆるやかに抵抗が発生する特性を持つ。このため、電界-電流特性において電界が電流密度の n 乗に比例するとした n 値モデルを仮定する。ここで、この強い非線形性を扱うために仮想的な電気伝導率 σ を用いて収束反復計算を行う。具体的には、まず仮の σ を全要素に設定し、電磁界方程式を解く。次に n 値モデルを用いて電流密度から σ を計算し直し、前回の σ との差を計算し、差が小さくなるまで収束反復計算を繰り返す。

得られた値から超伝導体内の磁束密度 B の分布、磁化 M 、交流損失密度 W を求めた。これらの値と n 値などの各種パラメータを変更することによる変化を理論値と比較を行うことで評価を行う。

3. 結果及び考察

図 1 に $J_c = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $n = 20$ として計算した B と、Bean-London モデルより得られた B を示す。Bean-London モデルの式を(1)として以下に表す。

$$B = \mu_0 H_e - \delta J_c x \quad (1)$$

ここで、透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 、磁場の侵入方向を示す符号関数 $\delta = \pm 1$ 、外部磁場 H_e である。理論値と計算値は、ほぼ同様の結果となった。しかし、計算値では傾きが一定でない部分があり、外部と超伝導体との接点付近での傾きも理論値に比べるとなだらかである。これらの原因は、要素の数が少ない、誤差が蓄積した、 n 値が小さいなどが考えられる。

また、図 2 に上記の B より計算した M の計算値と、理論値を示す。値が一定となるメジャー曲線の部分で値が一定でない、メジャーとマイナー曲線の変化部分が理論値に比べると

なだらかであることが確認できる。こちらも、先程と同様の理由が考えられる。この考えに基づいて n 値を 100 とした磁化曲線を図 3 に示す。すると、メジャーとマイナー曲線の変化部分が急にすることができ理論値により近似させることが出来た。

以上より、まだ改善点はあるが、FreeFem++に精度よく超伝導体のモデルを作成することができた。

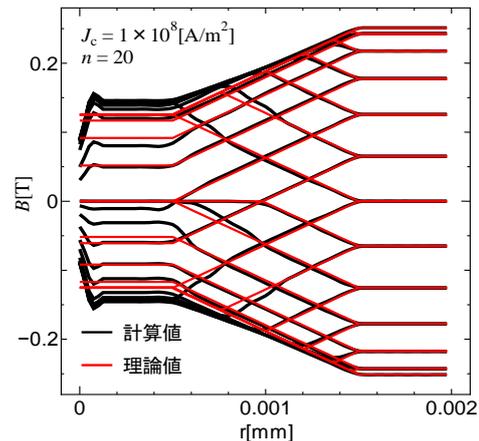
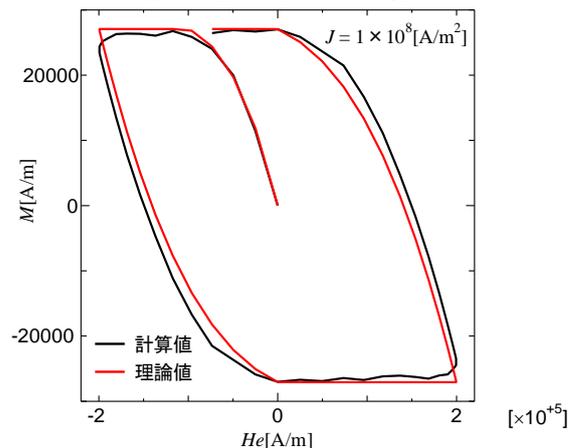
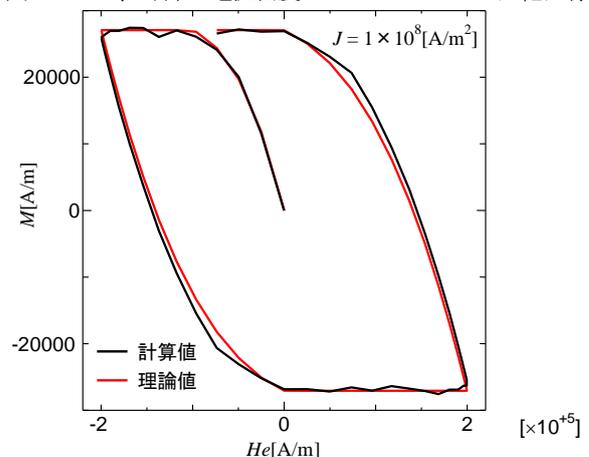


図 1: 超伝導体内の磁束分布

図 2: $n=20$ 、外部の電流密度 $J = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ の磁化曲線図 3: $n=100$ 、外部の電流密度 $J = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ の磁化曲線

【参考文献】

[1]本庄昇一：「高温超伝導ケーブル用スパイラル導体での交流損失数値解析」、電学論 B, Vol. 120 No. 11(2000)