

# FreeFem++による超伝導体内の電磁現象の 有限要素法を用いた数値解析

梅林 洋

平成23年2月23日

電子情報工学科

# 目次

第1章 序論	1
1.1 超伝導体	1
1.2 有限要素法 (FEM : Finite Element Method)	1
1.3 FreeFem++	2
1.4 弱形式	2
1.5 $n$ 値	3
1.6 メッシュサイズの注意点	3
1.7 表皮厚さ	4
1.8 ガラーキン法	4
1.8.1 近似解	4
1.8.2 重み付き残差法	5
1.8.3 ガラーキン法	5
1.9 グリーンの法則	5
1.9.1 グリーンの法則の証明	6
1.10 本研究の目的	7
第2章 解析方法	8
2.1 支配方程式の弱形式化	9
2.2 超伝導体内の電磁現象の数値解析の方法	12
2.3 磁束密度 $B$ の分布	13
2.4 磁化 $M$ の計算	14
2.5 交流損失密度 $W$ の計算	14
2.6 $\sigma$ の収束度の変更	15
2.7 メッシュの数の変更	15
第3章 結果及び考察	16
3.1 磁束密度 $B$ の分布	16
3.2 磁化 $M$ の計算	16
3.3 交流損失 $W$ の計算	19
3.4 $\sigma$ の収束度の変更	19

3.5	メッシュの変更 . . . . .	20
第4章	まとめ	28

# 表 目 次

# 目次

1.1	有限要素法の概念	2
2.1	超伝導体のモデル	8
2.2	$M$ を求めるための模式図	14
2.3	$W$ を求めるための模式図	15
3.1	$J' = 1 \times 10^8$ A/m <sup>2</sup> における磁束密度 $B$ の分布	17
3.2	$J' = 3 \times 10^7$ A/m <sup>2</sup> における磁束密度 $B$ の分布	17
3.3	$J' = 1 \times 10^8$ A/m <sup>2</sup> での各外部磁場 $H_e$ における磁化曲線	18
3.4	$J' = 3 \times 10^7$ A/m <sup>2</sup> での各外部磁場 $H_e$ における磁化曲線	18
3.5	交流損失密度 $W$ の値	19
3.6	$\varepsilon = 10^{-2}$ 、 $f = 0.1$ における $B$ の値	20
3.7	$\theta = \pi/2$ において $\varepsilon$ を変化させることによる $B_\varepsilon/B_{\text{conv}}$ の値	21
3.8	$\theta = 2\pi$ において $\varepsilon$ を変化させることによる $B_\varepsilon/B_{\text{conv}}$ の値	21
3.9	メッシュの数 30 における $B$ の分布	22
3.10	メッシュの数 50 における $B$ の分布	23
3.11	メッシュの数 60 における $B$ の分布	23
3.12	メッシュの数 70 における $B$ の分布	24
3.13	メッシュの数 100 における $B$ の分布	24
3.14	メッシュの数 400 における $B$ の分布	25
3.15	$\theta = \pi/2$ においてメッシュの数を変化させることによる $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$ の値	25
3.16	$\theta = 2\pi$ においてメッシュの数を変化させることによる $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$ の値	26
3.17	$H_m > H_p$ においてメッシュの数を変化させることによる $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$ の値	26
3.18	$H_m > H_p$ においてメッシュの数を変化させることによる $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$ の値	27

# 第1章 序論

## 1.1 超伝導体

1908年にオランダのヘイケ・カメルリング・オネス (Heike Kamerlingh Onnes) がヘリウムの液化に初めて成功した。さらに、1911年に液体ヘリウムの極低温によって、水銀の抵抗が4 K付近で突然ゼロになる現象を発見した。これは今までにない物理現象であることが分かり、このような現象を示す物質は超伝導体と呼ばれるようになった。超伝導状態においては電気抵抗が無いことから大電流を通電できることを期待され、研究が進められたが、しばらくの間、決定的な理論は発見されなかった。しかし、1957年にBCS理論によって超伝導体の発現機構が明らかにされた。これによると超伝導体が超伝導状態から常伝導状態へと転移する温度である臨界温度  $T_c$  の限界は、30 K程度だと考えられてきた。しかし、1986年にベドノルツ (Johannes G. Bednorz) とミュラー (Karl Alex Müller) によって、 $T_c$  が30 Kを超える酸化物超伝導体 La-Ba-Cu-O が発見され、その後、 $T_c$  が液体窒素の沸点 (77.3 K) を超える超伝導体も発見された。

## 1.2 有限要素法 (FEM : Finite Element Method )

有限要素法 (Finite Element Method) は、解析的に解くことが難しい微分方程式の近似解を数値的に得る方法の一つである。円柱や無限平板のような単純な形状ならば解析的に解くこともできるが、複雑な形状の問題を解く事は非常に困難である。そこで複雑な形状の問題の計算を行う場合、有限の範囲で対象物を単純な形状の要素の集合体としてとらえ、各々の要素間で境界条件を満たすように方程式を作成する。そして、各要素における方程式を対象物全体の連立一次方程式として組み上げて計算を行う。また、分割された要素であるメッシュを細かくするほど、元の連続体に近づくため計算精度は上昇する。有限要素法の概念を図 1.1 に示す。

ここで、境界条件とは、定義されている領域の周囲である境界で作用する値を指定する条件のことである。境界で変位を指定する境界条件を変位境界条件あるいはディリクレ (Dirichlet) 条件という。一方、境界に作用する応力を指定する境界条件を応力境界条件あるいはノイマン (Neumann) 条件という。また、指定された値が0であるような境界条件を斉次境界条件、0でないものを非斉次境界条件という。

有限要素法では解析領域を適当な領域で打ち切らなければならない。しかし、有限要

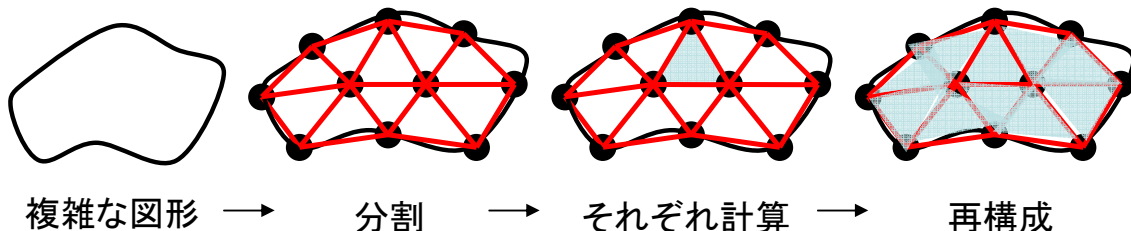


図 1.1: 有限要素法 の概念

素領域とその外側に広がる遠方領域との間で物理量の連続性が保証されなければ、数値解析は物理現象を再現したことにはならない。したがって、有限要素境界では境界外部と連続であることを保証している自然境界条件を設定する。

### 1.3 FreeFem++

独立変数の関数と偏導関数との関係を表す偏微分方程式は、物理学、工学、数学、金融などの多くの問題で用いられている。FreeFem++は、偏微分方程式を有限要素法を用いて数値的に解くことができるフランスで開発されたフリーのソフトウェアである [6]。プログラミングの方法はC++風の言語を用いて、境界形状、偏微分方程式、境界条件、出力の方法を記述することにより、メッシュの生成、有限要素法の計算、結果のプロットやファイルへの出力を行える。以前のバージョンであるFreeFemでは、偏微分方程式を導関数の階数が低い弱形式で記述する必要がなかったが、FreeFem++では弱形式で記述しなければならないため、多少の数学の知識が必要である。

### 1.4 弱形式

微分方程式の導関数が低い方程式のことである。例として以下の条件を満たす  $u$  を求める問題を示す。

強形式の場合

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad (0 < x < a) \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0, u(a) = u_a \tag{1.2}$$

弱形式の場合

$$\int_0^a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^a f(x)v dx \quad \forall v \tag{1.3}$$

$$u(0) = u(a) = 0 \tag{1.4}$$

ただし、 $v$  は  $v(0) = v(a) = 0$  を満たす 2 階微分可能な関数 .

となる . 強形式を弱形式に変換する場合、強形式の両辺に  $v(0) = v(a) = 0$  を満たす 2 階微分可能な関数  $v$  をかけ定義域全体 (0 から  $a$ ) まで部分積分する .

$$\int_0^a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \left[ \frac{du}{dx} v \right]_0^a = \int_0^a f(x) v dx \quad \forall v \quad (1.5)$$

$v(0) = v(a) = 0$  から左辺第 2 項は 0 より

$$\int_0^a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^a f(x) v dx \quad \forall v \quad (1.6)$$

$v(0) = v(a) = 0$  の境界条件さえ満たせば任意の  $v$  について成立する . よって強形式から弱形式に変換することができた .

## 1.5 $n$ 値

超伝導体は通電電流  $I$  の増加により強い非線形な電圧  $V$  の発生を示す . この電流-電圧特性の急激な立ち上がりを  $V \propto I^n$  で表せ、この指数  $n$  を  $n$  値と言う .  $n$  値が大きい場合、電流を少し下げることにより発生電圧を急速に下げることが可能である . 逆に  $n$  値が小さい場合、電流を少し下げても発生電圧は急速に小さくならない . そのため、一般的に超伝導体の応用において  $n$  値が大きほうが良いとされている .

## 1.6 メッシュサイズの注意点

導体内での急激な電磁界分布の変動、およびそれに伴う損失を精度良く評価するためには、その変動を表現できる程度にメッシュサイズを細かく設定する必要がある . 少なくとも以下の式で表される表皮厚さ以下に設定することが求められる .

$$D = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi f \sigma \mu}} \quad (1.7)$$

超伝導体のモデルの要素分割では、式中の  $\sigma$  を  $\sigma_{\max}$  で置き換えた値がメッシュサイズの目安となる .

また、表皮厚さとは、高周波電流が導体を流れるとき、電流密度が導体表面で高く離れると低くなるという表皮効果において、導体の電流密度  $J$  は深さ  $\delta$  にたいして以下のよう減少する

$$J = e^{-\delta/D} \quad (1.8)$$

における  $D$  のことである . この深さは電流が表面電流の  $1/e$  (約 0.37) となる深さである . ここで  $e$  は自然数とする .



## 1.7 表皮厚さ

## 1.8 ガラーキン法

ガラーキン法とは、有限要素法を行う際に微分方程式の近似解を導出するための方法である。微分方程式の近似解を導出する方法の一つである重み付き残差法を発展した形となるため、まず近似解、次に重み付き残差法、最後にガラーキン法について説明する。

### 1.8.1 近似解

近似解は解析解（厳密解）であるための条件のうちいくつかを弱くした条件を満足するものである。解析解であるための必要条件は

- 境界条件を満足する。
- 必要な階数だけ微分が可能である。
- 支配方程式をいたるところで満足する。

である。

近似解の原形について未知関数を  $u(x)$ 、力を  $f(x)$  とした微分方程式を

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (1.9)$$

とし、境界条件を斉次ディレクレ境界条件

$$u(x=0) = 0, u(x=l) = 0 \quad (1.10)$$

とした問題の近似解を導出することで説明する。

まず、未知関数  $u(x)$  の近似関数を有限個の異なる既知関数  $g_i(x)$  の線形和で表す。

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N a_i g_i(x) \quad (1.11)$$

ここで、 $g_i(x) (i = 1, 2, \dots, N)$  は、解  $u(x)$  と同じ斉次境界条件

$$g_i(0) = g_i(l) = 0 \quad (1.12)$$

を満たす  $N$  個の既知のなめらかな関数である。なお、ここでは  $g_i(x)$  のことを基底関数と呼ぶ。

### 1.8.2 重み付き残差法

方程式の誤差を重み付きの意味で0にしようとする方法を重み付き残差法という。式(1.11)の $\tilde{u}(x)$ が厳密解であると仮定すると、このとき任意の関数 $v(x)$ に対して、

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2 \tilde{u}(x)}{dx^2} + f(x) \right) v(x) dx = 0 \quad (1.13)$$

$$\int_0^1 \left( \sum_{i=1}^N a_i \frac{d^2 g_i(x)}{dx^2} + f(x) \right) v(x) dx = 0 \quad (1.14)$$

という式が成り立つ。できるだけ多くの $v(x)$ について上式を満足するとより精度の良い近似解といえる。また、このような意味で関数 $v(x)$ のことを試験関数または重み関数と呼ぶ。

### 1.8.3 ガラーキン法

重み付き残差法の式(1.13)、(1.14)において $v_i(x) = g_i(x)$ とする方法をガラーキン法という。解 $u(x)$ を近似するために用いた基底関数 $g_i(x)$ そのものを試験関数とする重み付き残差法である。

## 1.9 グリーンの法則

曲面 $S$ の周囲を $C$ とするとき以下の式が成り立つ

$$\iint_S \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (\psi dx + \phi dy) \quad (1.15)$$

ガウスの発散定理

グリーンの法則証明の際にガウスの発散定理を用いるので以下に説明する。3次元ユークリッド空間の有界な領域を $V$ 、その境界面を $S$ とする。この閉領域で定義されたベクトル関数 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 、単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ について以下の式が成り立つ

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.16)$$

これは(領域全体での増減) = (領域表面で出たり入ったりした量の差)を示している。また、成分表示すると以下で表せる。

$$\iiint_V \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma) dS \quad (1.17)$$

ここで、

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) = (A_1(x, y, z), A_2(x, y, z), A_3(x, y, z)) \quad (1.18)$$

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (1.19)$$

[証明]  $x$  軸に平行な直線を引き、閉曲面  $S$  との交点を原点近い側から  $M_1$ 、 $M_2$  とする。このとき  $V$  の  $yz$  平面への射影を  $S_{yz}$  とすると、体積分の  $x$  軸方向成分は以下で表せる。

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV &= \iint_{S_{yz}} \left( \int \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \\ &= \iint_{S_{yz}} [A_1(M_2) - A_1(M_1)] S_{yz} \end{aligned} \quad (1.20)$$

ここで、面積素  $dS_{yz}$  は、点  $M_2$  における曲面  $S$  の面積素  $dS(M_2)$  の射影として以下のように表現できる

$$dS_{yz} = dS(M_2) \cos \beta \quad (1.21)$$

これより

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV = \iint_S A_1 \cos \beta dS \quad (1.22)$$

同様に  $A_2$ 、 $A_3$  軸方向成分でも成り立つので、これらの式を足すことで定理が成り立つ。

[証明終わり]

### 1.9.1 グリーンの法則の証明

[証明] 式 (1.16) において、

$$\mathbf{A} = [\phi(x, y), -\psi(x, y), 0] \quad (1.23)$$

とし、積分範囲は底面が  $xy$  平面内にある領域  $D$ (この周囲を  $C$  とする) で高さが 1 の鉛直に立つ柱とする。この柱の内部を  $V$ 、表面を  $S=D$ (底面)+ $D'$ (上面)+ $S'$ (側面) とすると、式 (1.16) は、

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iiint_V \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy dz \quad (1.24)$$

$$= \iint_S \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy \int_0^1 dz \quad (1.25)$$

一方、式 (1.16) の右辺は上面と底面に関する積分は打ち消し合うため、側面  $S'$  についてのみ考える。このとき、側面では、曲線  $C$  の微分長さを  $ds$  とすると

$$dS = dz dS \quad (1.26)$$

とおけるので、側面上の法線単位ベクトルを、 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \alpha, 0)$  とすると

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_S (\phi \cos \alpha - \psi \sin \alpha) dz ds \\ &= \oint_C \int_0^1 (\phi \cos \alpha - \psi \sin \alpha) dz ds \\ &= \oint_C (\phi \cos \alpha - \psi \sin \alpha) ds \end{aligned}$$

$\cos \alpha ds = dy$ ,  $\sin \alpha ds = -dx$  より

$$= \oint_C (\phi dy + \psi dx) \quad (1.27)$$

したがって

$$\iint_D \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (\psi dx + \phi dy) \quad (1.28)$$

となり、DとSを改めると定理となる。

[証明終わり]

## 1.10 本研究の目的

1.2章に述べたように、有限要素法は解析的に解くことが難しい偏微分方程式の近似解を得るために有効な手段の一つであるため、有限要素法を用いた超伝導体内の電磁現象の計算が行われてきている。しかし、手計算で行うには要素の面積や体積を求めるためにガウスの積分など、座標変換を必要とする手法を用いるため複雑で難解である。そのため、有限要素法を用いて超伝導体内の電磁現象を計算するには市販のソフトウェアを利用する。もしくはプログラムを自ら作成する必要があった。市販のソフトウェアは高額であり、研究に必要とする考えを組み込むことや、必要とするパラメータを取り出そうとすると困難なことが多い。一方で自作によるプログラムは豊富な経験と知識を必要とし、気軽に作れるものではない。これらの問題がなく十分な数値解析を行えるとより研究が発展できると考えられる。

そこで、本研究では超伝導体特有の電流-電圧特性の強い非線形性を FreeFem++ に組み込むことによって超伝導体のモデルを作成し、超伝導体内の電磁現象の有限要素法を用いた数値解析を行うことを目的とする。

## 第2章 解析方法

本研究では、円筒超伝導体の周囲に電流を流したモデルについて電磁界解析を行う。数値解析対象のモデリングは、ベクトルポテンシャル $A$ と、スカラーポテンシャル $\phi$ を用いた $A$ - $\phi$ に基づいて行う。また、円柱座標系において、 $z$ 軸を中心軸として $\theta$ 方向分布は一定であると仮定して考える軸対称場を用いる。ただし、FreeFem++では二、三次元場は解けるが、より汎用性の高い軸対称磁場は実装されていない。これについては軸対称三次元場の支配方程式を弱形式に変換することで実現することが可能である。

得られた値から超伝導体内の磁束密度 $B$ の分布を求め、それを基に磁化 $M$ を求め、さらにそれを基に交流損失密度 $W$ を求めた。また、 $n$ 値の変更、 $\sigma$ の収束度の変更、メッシュの数の変更を行い、それに対してどのような影響を受けるかを調査した。

軸対称場での超伝導体のモデルの条件は、解析に用いる空間を $r$ 軸方向0.01–10.01 mm、 $z$ 軸方向 $-0.5$ – $0.5$  mmとし、電流を流す空間を $r$ 軸方向3–5 mm、 $z$ 軸方向 $-0.5$ – $0.5$  mmとし、超伝導体のある空間を $r$ 軸方向0.5–1.5 mm、 $z$ 軸方向 $-0.5$ – $0.5$  mmとする。図2.1の左図に超伝導体のモデルの全体図を、右図に軸対称を用いた図をそれぞれ示す。

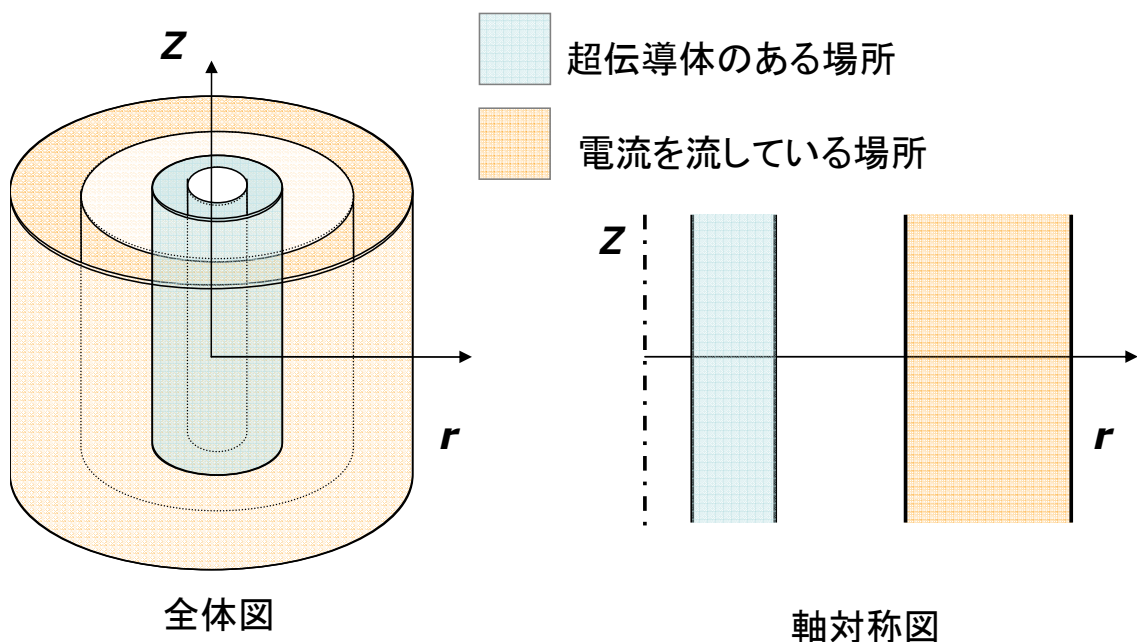


図 2.1: 超伝導体のモデル

## 2.1 支配方程式の弱形式化

電磁界に関する支配方程式は、透磁率を  $\mu$ 、導電率を  $\sigma$  とすると次式で表すことができる。

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\sigma (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \phi) \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \sigma (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \phi) = 0 \quad (2.2)$$

また、磁界  $B$ 、電界  $E$ 、電流密度  $J$  はそれぞれ次式から算出される。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{E} = -\nabla \phi - \dot{\mathbf{A}}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.3)$$

有限要素法を用いて解析を行う為には、一般的には支配方程式が弱形式である必要がある。そのため、支配方程式の弱形式化する手順を以下に示す。

円柱座標系におけるスカラーポテンシャル  $\phi$  の勾配 (gradient)、およびベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の発散 (divergence)、回転 (rotation) はそれぞれ以下のように定義される。

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & A_\theta & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right\} \mathbf{e}_r \\ \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ここで、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  はそれぞれ  $r, \theta, z$  方向の単位ベクトルとする。また軸対称場ではベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は  $\theta$  方向成分のみを有することになり、物理量は  $\theta$  方向には一様である。つまり以下のような仮定が成り立つ。

$$A_r = A_z = 0, \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.7)$$

式 (2.7) を式 (2.6) に代入すると次のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_r \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ここで、式 (2.7) を考慮して式 (2.1) を計算すると、次のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) & \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \right] \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right\} \right\} \mathbf{e}_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上より、式 (2.1) の具体的な成分を求めることが出来た。また、以降は  $A_\theta$  は特に断らない限り  $A$  と表記する。式 (2.1) に式 (2.3)、(2.9) を代入して整理すると、支配方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) \right\} - \sigma (\dot{A} + \nabla \phi) = 0 \quad (2.9)$$

ここで、要素の重み関数を  $\{N\}$  とすると、ガラーキソ法を用いた式は以下のように表される。また、軸対称場であるので各項が  $2\pi r$  倍される。

$$\iint_S \{N\} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) \right\} \right] 2\pi r dr dz - \iint_S \{N\} \sigma (\dot{A} + \nabla \phi) 2\pi r dr dz = 0 \quad (2.10)$$

ここで、式 (2.10) の左辺第 1 項について考える。

$$\iint_S \{N\} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) \right\} \right] 2\pi r dr dz \quad (2.11)$$

式 (2.11) は 2 階微分の項があるので、弱形式化つまり 1 階微分形に次数を下げるために部分積分を行う。部分積分の公式を導出するために次のスカラー関数  $U$  と  $V$  の関係を示す公式を考える。

$$\nabla \cdot (U \nabla V) = \nabla U \cdot \nabla V + U \cdot \nabla^2 V \quad (2.12)$$

この公式を次のように変形する。

$$\iint_S \nabla \cdot (U \nabla V) dS = \iint_S (\nabla U \cdot \nabla V + U \cdot \nabla^2 V) dS \quad (2.13)$$

ここで式 (2.13) の左辺においてグリーンの定理を考えると以下のようなになる。

$$\iint_S \nabla \cdot (U \nabla V) dS = \oint_C (U \nabla V) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.14)$$

$\mathbf{n}$  は有限要素領域の境界  $\Gamma$  上の法線ベクトルであり、その  $r$ 、 $z$  方向成分を  $n_r$ 、 $n_z$  とする。式 (2.14) を式 (2.13) の左辺に適用し整理を行うと、以下の部分積分の公式が成り立つ。

$$\iint_S (U \cdot \nabla^2 V) dS = \oint_C (U \nabla V) \cdot \mathbf{n} dS - \iint_S (\nabla U \cdot \nabla V) dS \quad (2.15)$$

上記の部分積分の公式において考える。

$$U = 2\pi r\{N\}, \quad \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \quad (2.16)$$

とすると

$$U\nabla V = (2\pi r\{N\}) \frac{1}{\mu r} \begin{bmatrix} A + r \frac{\partial A}{\partial r} \\ r \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} (U\nabla V) \cdot \mathbf{n} &= (2\pi r\{N\}) \frac{1}{\mu r} \begin{bmatrix} A + r \frac{\partial A}{\partial r} & r \frac{\partial A}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_r \\ n_z \end{bmatrix} \\ &= (2\pi r\{N\}) \left[ \left( \frac{A}{\mu r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \right) n_r + \frac{\partial A}{\partial z} n_z \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \nabla U \cdot \nabla V &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r\{N\}) & \frac{\partial}{\partial z} (2\pi r\{N\}) \end{bmatrix} \frac{1}{\mu r} \begin{bmatrix} A + r \frac{\partial A}{\partial r} \\ r \frac{\partial A}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= 2\pi r \begin{bmatrix} \frac{\partial \{N\}}{\partial r} + \frac{\{N\}}{r} & \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \end{bmatrix} \frac{1}{\mu r} \begin{bmatrix} A + r \frac{\partial A}{\partial r} \\ r \frac{\partial A}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= 2\pi r \left[ \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \left( \frac{A}{\mu r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \left( \frac{\{N\} A}{\mu r^2} + \frac{\{N\}}{\mu r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

と考えると、式 (2.11) は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} &\iint_S \{N\} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right\} \right] 2\pi r dr dz \\ &= \oint_C 2\pi r \{N\} \left[ \left( \frac{A}{\mu r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \right) n_r + \frac{\partial A}{\partial z} n_z \right] ds \\ &- \iint_S 2\pi r \left[ \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \left( \frac{A}{\mu r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \left( \frac{\{N\} A}{\mu r^2} + \frac{\{N\}}{\mu r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (2.20)$$

式 (2.20) の右辺第 1 項は境界積分項である。ここで、自然境界条件は磁界  $H$  が境界に対して垂直となる条件であり、以下となる。

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.21)$$

また、磁界  $H$  は以下のように表せる。

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$



ここで、 $H$  と  $n$  の外積を考える．

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} \times \mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r}(rA) \\ n_r & 0 & n_z \end{vmatrix} \\
&= \left[ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r}(rA)n_r + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} n_z \right] \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \left( \frac{1}{\mu r} A + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \right) n_r + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} n_z \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}
\end{aligned}$$

したがって、式 (2.15) の条件より

$$\left( \frac{A}{\mu r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \right) n_r + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} n_z = 0 \tag{2.24}$$

これより、式 (2.20) の右辺第 1 項の境界積分は 0 となる．また、有限要素法による磁場解析では、この項は通常 0 となる．これより以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\iint_S \{N\} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r}(rA) \right\} \right] 2\pi r dr dz \\
&= - \iint_S 2\pi r \left[ \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \left( \frac{A}{\mu r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \left( \frac{\{N\} A}{\mu r^2} + \frac{\{N\} \partial A}{\mu r} \frac{\partial r}{\partial r} \right) + \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] dS \\
&= -2\pi \iint_S \frac{A}{\mu} \frac{\partial \{N\}}{\partial r} dr dz - 2\pi \iint_S \frac{r}{\mu} \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} dr dz - 2\pi \iint_S \frac{\{N\} A}{\mu r} dr dz \\
&\quad - 2\pi \iint_S \frac{\{N\} \partial A}{\mu} \frac{\partial r}{\partial r} dr dz - 2\pi \iint_S \frac{r}{\mu} \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} dr dz \tag{2.25}
\end{aligned}$$

よって式 (2.11) の弱形式化が行えた．

以上より式 (2.1) を弱形式化して整理すると以下のように表せる．

$$\begin{aligned}
&\iint_S \frac{A}{\mu} \frac{\partial \{N\}}{\partial r} dr dz + \iint_S \frac{r}{\mu} \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} dr dz + \iint_S \frac{\{N\} A}{\mu r} dr dz \\
&+ \iint_S \frac{\{N\} \partial A}{\mu} \frac{\partial r}{\partial r} dr dz + \iint_S \frac{r}{\mu} \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} dr dz + \iint_S \{N\} \sigma (\dot{A} + \nabla \phi) dr dz = 0 \tag{2.26}
\end{aligned}$$

## 2.2 超伝導体内の電磁現象の数値解析の方法

超伝導体の抵抗は完全に 0 ではなく、電流密度が臨界電流密度  $J_c$  に近づくとつれてゆるやかに抵抗が発生する特性をもつ．このため、電流-電圧特性において電界が電流密度の  $n$  乗に比例するとした  $n$  値モデルを仮定する．電界基準  $E_0$  を発生している時の電流密度を  $J_c$  とすると電流-電圧特性は、以下のように表せる．

$$E = E_0 \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \quad (2.27)$$

ここで、この強い非線形性を扱うために式 (2.1)、式 (2.2)、式 (2.3) の  $\sigma$  は仮想的な電気伝導率

$$\sigma_s = \frac{J}{E} = \frac{J_c}{E_0} \left( \frac{J_c}{J} \right)^{n-1} \quad (2.28)$$

を用いる．ここで初期電気伝導率は

$$\sigma_{init} = \frac{J_c}{E_0} \quad (2.29)$$

とし、また、電気伝導率の上限値として最大電気伝導率を  $\sigma_{max}$  と定義する．

$\sigma_s$  は非線形性を持つので、以上に基づいて各解析時刻において収束反復演算を行う．また、その反復演算手順を以下に示す．

1. 初期導電率  $\sigma_{init}$  を全要素に設定
2. 電磁界方程式を解く
3.  $\sigma_s$  を計算し、前回の  $\sigma_s$  との差を計算する
4. 差が小さくなるまで収束反復演算
5.  $\sigma_s$  が  $\sigma_{max}$  を超える場合は  $\sigma_{max}$  にする

収束の判定の条件を以下に示す．

$$\frac{\Sigma \Delta \sigma}{\Sigma \sigma} < \varepsilon \quad (2.30)$$

ただし、 $\varepsilon$  は事前に設定した基準値

### 2.3 磁束密度 $B$ の分布

$B = \nabla \times A$  で求められるので、軸対称場では  $r$  および  $z$  方向成分を有し、先程導出した  $A$  を用いるとそれぞれ次のようになる．

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = \frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \quad (2.32)$$

理論値は Bean-London モデルを用いた．以下に式を示す．

$$B = \mu_0 H_e - \delta J_c x \quad (2.33)$$

ここで外部磁場を  $H_e$ 、磁場の侵入方向を示す符号関数を  $\delta = \pm 1$  とする．

## 2.4 磁化 $M$ の計算

$M$  を求める式を以下に示す .

$$M = \frac{\langle B \rangle}{\mu_0} - H_e \quad (2.34)$$

ここで  $\langle B \rangle$  は空間平均であり、

$$\langle B \rangle = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} B(r) 2\pi r dr \quad (2.35)$$

で表すことができる . また、 $H_e$  は、

$$H_e = J_c(r_2 - x) \quad (2.36)$$

で表すことができる . ただし、内径を  $r_1$ 、外径を  $r_2$  とする . ここで、 $\langle B \rangle$  の積分は台形法を用いて、面積の近似値を求めた . また、超伝導体の厚さを  $d$  とすると、中心到達磁場  $H_p$  は以下で表すことができる .

$$H_p = J_c d \quad (2.37)$$

2章の始めの解析方法で示したように今回は  $d = 1 \text{ mm}$  と設定した . また、外部からの最大磁場を  $H_m$  とする . 模式図を 2.2 に示す .

## 2.5 交流損失密度 $W$ の計算

$W$  を求める式は、

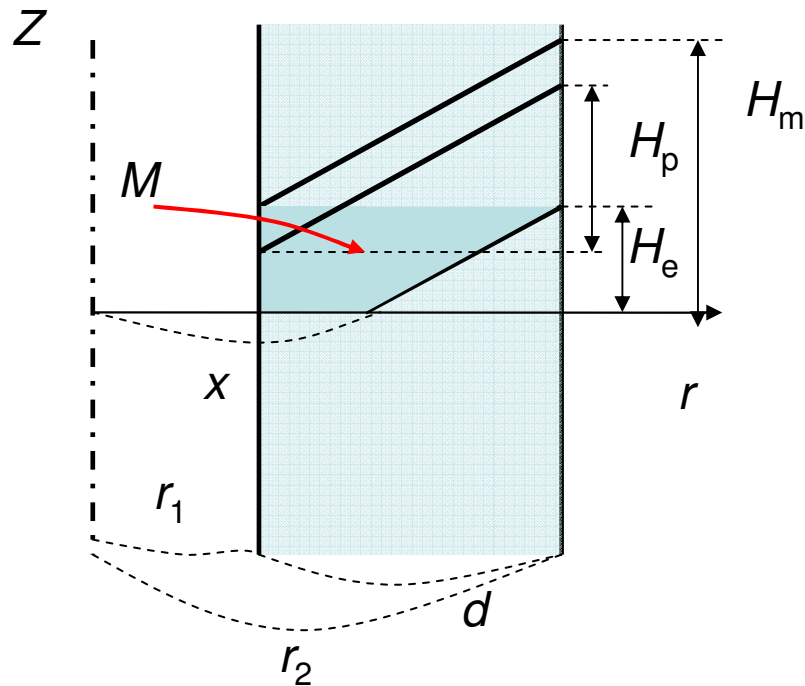


図 2.2:  $M$  を求めるための模式図

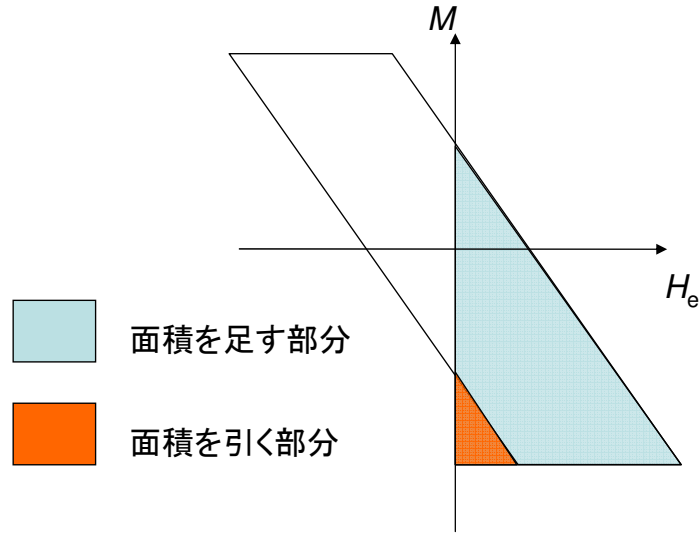


図 2.3:  $W$  を求めるための模式図

$$W = \oint M dH_e \quad (2.38)$$

で表される  $H_m$  を変更し、それぞれの  $W$  を求めた。また、 $M$  の面積はまず半分を台形法を用いて求め、それを 2 倍した。模式図を図 2.3 に示す。

## 2.6 $\sigma$ の収束度の変更

式 (2.30) より基準値  $\varepsilon$  を変更し、 $B$  の分布で影響を調査した。また、 $\sigma$  の収束度に依存する磁束密度を  $B_\varepsilon$  とし、十分に収束したと考えられる磁束密度を  $B_{\text{conv}}$  とすると、収束値との一致度を  $B_\varepsilon/B_{\text{conv}}$  で表し、 $\sigma$  を変更することによってどのような影響を受けるかを調査した。ただし、今回は  $B_\varepsilon$  及び  $B_{\text{conv}}$  は、 $B$  の分布において  $r = 1 \text{ mm}$ 、 $\theta = \pi/2, 2\pi \text{ rad}$  における値とする。

## 2.7 メッシュの数の変更

メッシュを変更し、 $B$  の分布で影響を調査した。また、メッシュの細かさに依存する磁束密度を  $B_{\text{mesh}}$  とし、十分にメッシュを細かくしたと考えられる磁束密度を  $B_{\text{fine}}$  とすると、収束値との一致度を  $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$  で表し、メッシュの数を変更することによってどのような影響を受けるかを調査した。ただし、今回は  $B_{\text{mesh}}$  及び  $B_{\text{fine}}$  は、 $B$  の分布において  $r = 1 \text{ mm}$ 、 $\theta = \pi/2, 2\pi \text{ rad}$  における値とする。

## 第3章 結果及び考察

### 3.1 磁束密度 $B$ の分布

外周に流した電流密度を  $J'$  とすると、図 3.1 に  $J_c = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $n = 20$ 、メッシュの数を 100、 $J' = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $f = 0.1 \text{ Hz}$ 、 $r$  方向のプロットのことを 80 点、1 周期の分割数を 24 としたときの計算値と理論値の  $B$  の分布を示す。また、図 3.2 に先程のパラメータから  $J'$  を  $3 \times 10^7 \text{ A/m}^2$  に変更した計算値と理論値の  $B$  の分布を示す。

この図は超伝導体に外部から磁場をかけた際にどのように  $B$  が侵入しているかを示している。例として図 3.1 において最初の線は  $H_e \simeq -1/\mu_0 \times 6.5 \times 10^{-2} \text{ A/m}$  から侵入している線で、そのあと  $H_e$  は負の方向に進む。そして、最後の線は  $H_e \simeq 0 \text{ A/m}$  から侵入している線である。

ここで、 $r \simeq 0 \text{ mm}$  で値が 0 に急激に近づくが、これは有限要素法の特徴であり弱点である。また、理論値に比べると傾きが一定とならなかった。これはメッシュの数が足りなかったことが考えられる。また、理論値に比べると傾きが緩やかであった。これは  $n$  値が小さかったことが考えられる。

### 3.2 磁化 $M$ の計算

図 3.3 に  $J_c = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $n = 20$ 、メッシュの数を 100、 $J' = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $f = 0.1 \text{ Hz}$ 、 $r$  方向のプロットのことを 80 点、1 周期の分割数を 50 としたときの  $\langle B \rangle$  を用いて式 (2.34) より導出した計算値と理論値の  $M$  のグラフを示す。また、図 3.4 に先程のパラメータから  $J'$  を  $3 \times 10^7 \text{ A/m}^2$  に変更した計算値と理論値の  $M$  のグラフを示す。

この図は各時刻の  $H_e$  における  $M$  の大きさを示している。折れ曲がりのない磁束分布から得られる  $M$  の曲線をメジャー曲線、折れ曲がりがある磁束分布から得られる  $M$  の曲線をマイナー曲線という。

ここで、マイナー曲線の傾きは理論値とほぼ同様の結果を得ることはできたが、メジャー曲線では値が一定とならなかった。これも、メッシュの数が足りなかったことが考えられる。

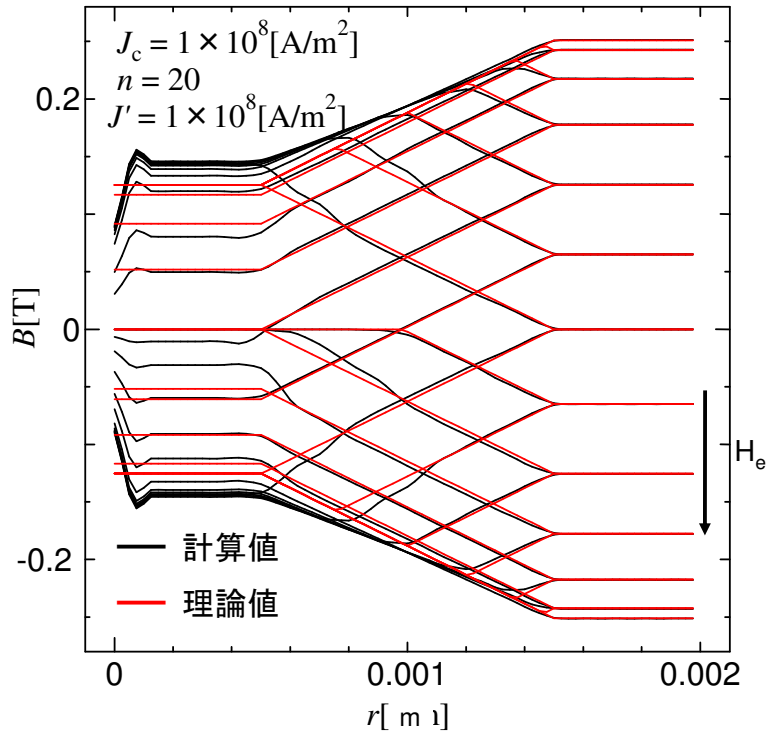


図 3.1:  $J' = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$  における磁束密度  $B$  の分布

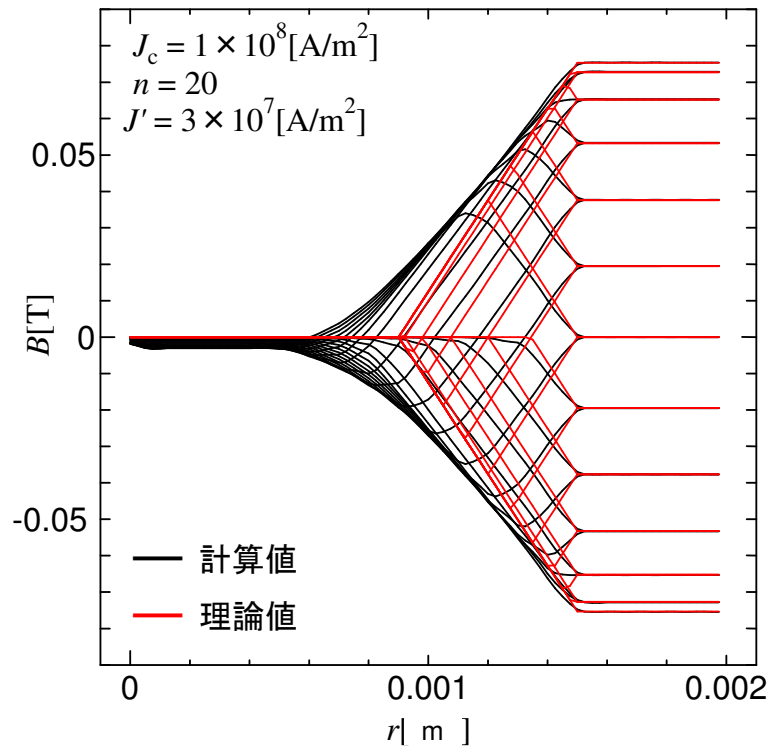


図 3.2:  $J' = 3 \times 10^7 \text{ A/m}^2$  における磁束密度  $B$  の分布

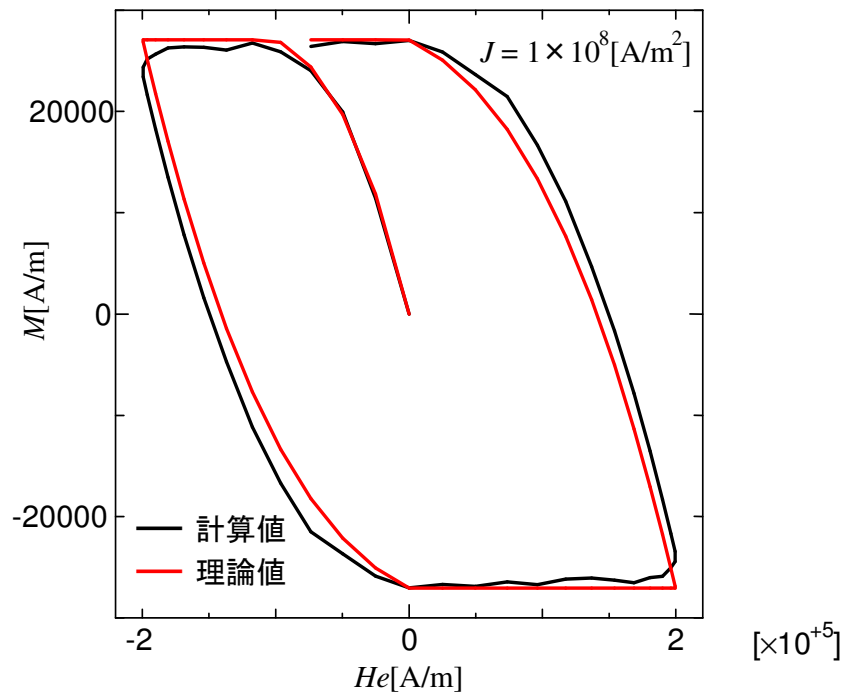


図 3.3:  $J' = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$  での各外部磁場  $H_e$  における磁化曲線

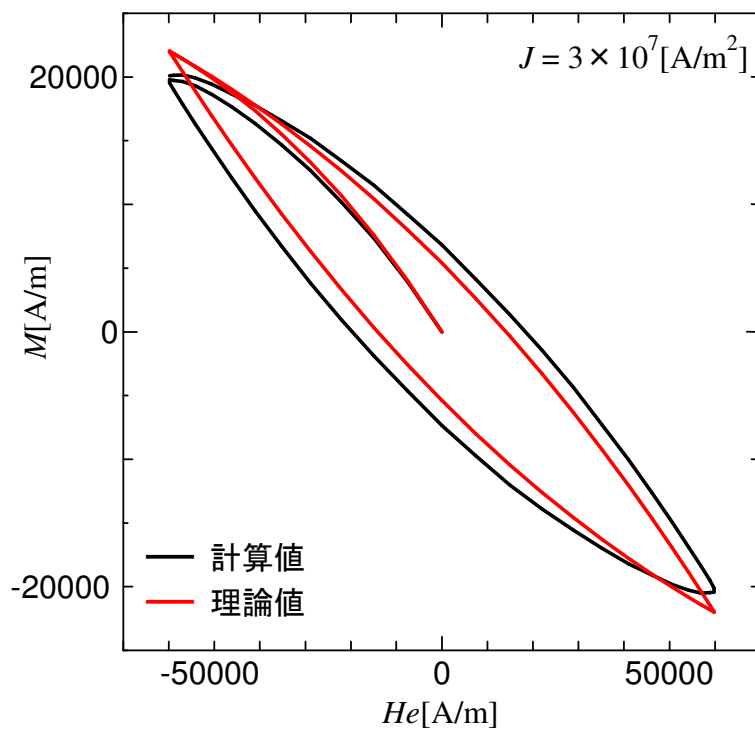


図 3.4:  $J' = 3 \times 10^7 \text{ A/m}^2$  での各外部磁場  $H_e$  における磁化曲線

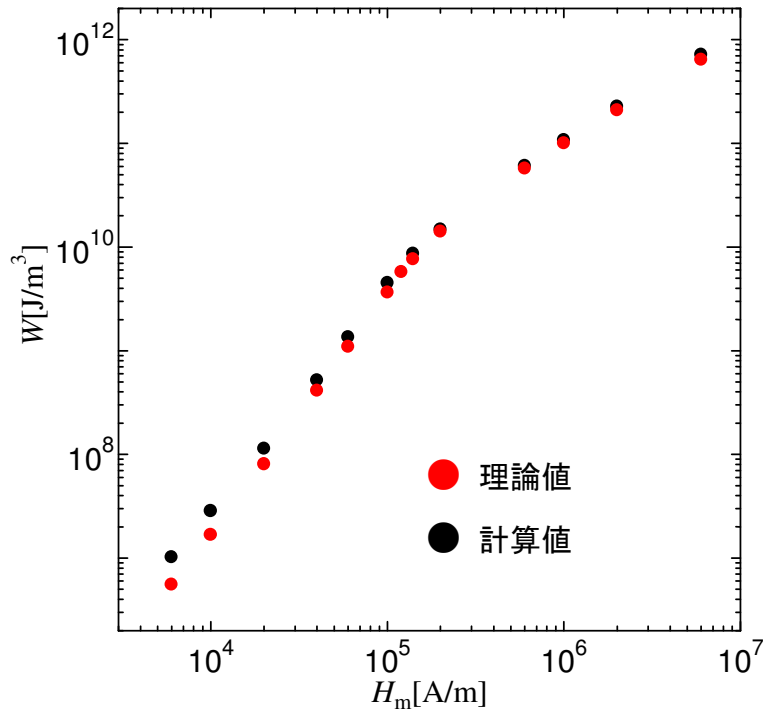


図 3.5: 交流損失密度  $W$  の値

### 3.3 交流損失 $W$ の計算

図 3.5 に  $J_c = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $n = 20$ 、メッシュの数を 100、 $f = 0.1 \text{ Hz}$ 、 $r$  方向のプロットの数 80 点、1 周期の分割数を 50 とし、 $J'$  を変化させることによる各  $H_m$  での  $M$  の面積より導出した計算値と理論値の  $W$  のグラフを示す。

この図は各  $H_m$  における  $W$  の大きさを両対数グラフで示す。 $H_m < H_p$  の場合と  $H_m > H_p$  の場合によって  $W$  の値が変化する。ここでは  $H_p = 1 \times 10^5 \text{ A/m}$  となる。ここで、 $H_m < 1 \times 10^5 \text{ A/m}$  での傾きは理論値では約 2.33、計算値では約 2.16 となった、また、 $H_m > 1 \times 10^5 \text{ A/m}$  での傾きは理論値では約 1.04、計算値では約 1.07 となった、一般的な理論値では  $H_m < 1 \times 10^5 \text{ A/m}$  での傾きは 3、 $H_m > 1 \times 10^5 \text{ A/m}$  での傾きは 1 となるはずだが、理論値での値が異なるのは台形法による積分の近似の際の誤差または、今回は円筒形を用いたからだと考える。

### 3.4 $\sigma$ の収束度の変更

図 3.6 に  $J_c = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $n = 20$ 、メッシュの数を 100、 $J' = 1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 、 $f = 0.1 \text{ Hz}$ 、 $r$  方向のプロットの数 80 点、1 周期の分割数を 24 とし、 $\sigma$  の収束度に依存する磁束密度  $B_\varepsilon$  と十分にメッシュを細かくしたと考えられる磁束密度  $B_{\text{conv}}$  の  $\varepsilon = 10^{-2}$  での分布を示す。また、図 3.7、3.8 に先程のパラメータから、 $f = 0.01, 0.1, 1, 10 \text{ Hz}$  に設定し、 $\varepsilon$  を変化させることによる  $B_\varepsilon/B_{\text{conv}}$  の値の変化を示す。図 3.6 は傾きが非常に乱れていて傾きが



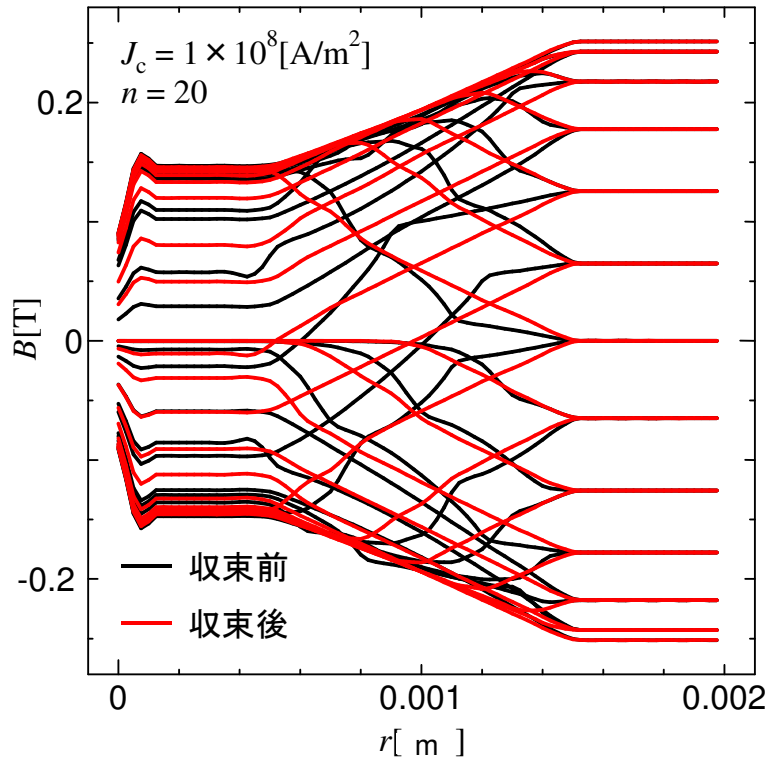


図 3.6:  $\varepsilon = 10^{-2}$ 、 $f = 0.1$  における  $B$  の値

一定となる箇所がない．これは点をプロットする度に以前とは非常に異なった  $\sigma$  の値をとるからだと考えられる．

図 3.7、3.8 より、 $B_\varepsilon/B_{\text{conv}}$  が 1 に近いほど値が収束しているのだが、 $\theta = 2\pi$  rad に比べ  $\theta = \pi/2$  rad の方が早く収束したことが分かる．これは時間による損失などの誤差が蓄積したことが考えられる． $f = 0.01$  Hz の方が  $f = 10$  Hz より値が早く一致していることが分かる．これは表皮厚さ  $D$  がメッシュサイズより大きくなったためではないかと考えられる．また、得られたデータから  $\varepsilon = 10^{-6}$  で収束することが考えられる． $f = 10$  Hz での  $D$  が  $1.59 \times 10^{-5}$  m のため、これより良い精度がだからではないかと考えられる．

### 3.5 メッシュの変更

図 3.9–3.14 に  $J_c = 1 \times 10^8$  A/m<sup>2</sup>、 $n = 20$ 、 $J' = 1 \times 10^8$  A/m<sup>2</sup>、 $f = 0.1$  Hz、 $r$  方向のプロットの数 80 点、1 周期の分割数を 50 とし、mesh の細かさに依存する磁束密度  $B_{\text{mesh}}$  と十分にメッシュを細かくしたと考えられる磁束密度  $B_{\text{fine}}$  の mesh の数 30, 50, 60, 70, 100, 400 での分布を示す．また、図 3.15–3.18 に先程のパラメータから、 $J' = 1 \times 10^7, 3 \times 10^7, 1 \times 10^8, 1 \times 10^9$  と  $J'$  を設定し、さらにメッシュの数を変化させることによる  $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$  の変化を示す．そのうえで、図 3.15、3.16 は  $\theta = \pi/2$  rad 及び  $\theta = 2\pi$  rad での変化をそれぞれ示し、図 3.17、3.18 は  $H_m > H_p$  及び  $H_m < H_p$  の場合での変化をそれぞれ示す．ただし、 $J' = 1 \times 10^7$  における  $2\pi$  のグラフはメッシュの数が 100 以下は精度に欠けるため省略する．

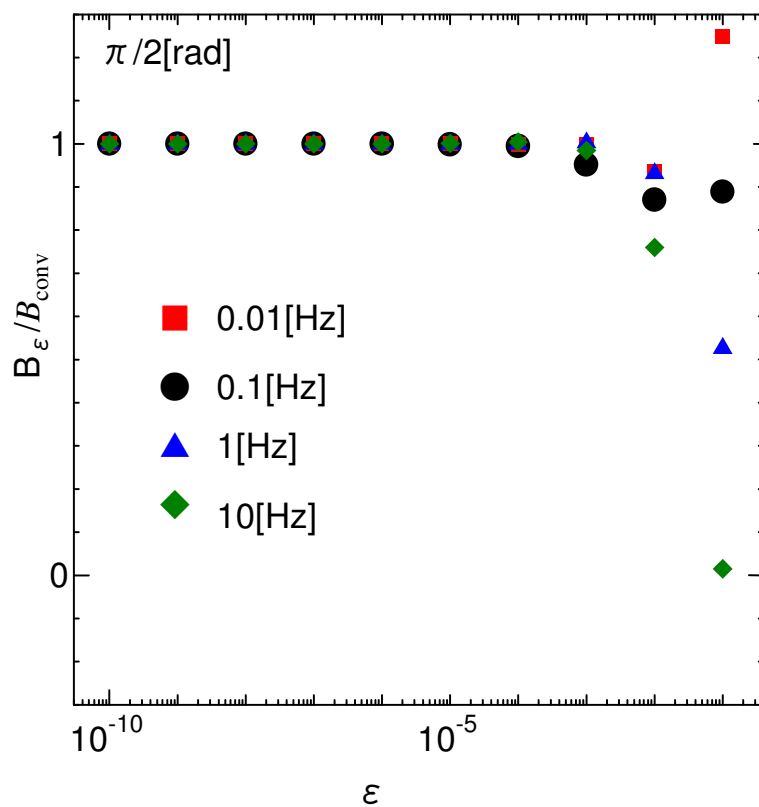


図 3.7:  $\theta = \pi/2$  において  $\epsilon$  を変化させることによる  $B_\epsilon/B_{\text{conv}}$  の値

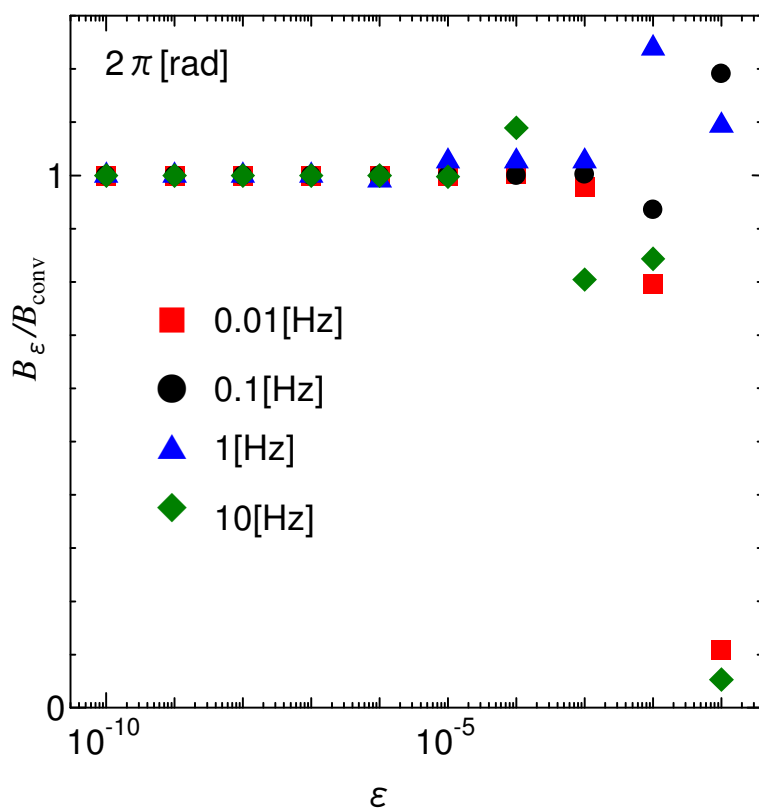


図 3.8:  $\theta = 2\pi$  において  $\epsilon$  を変化させることによる  $B_\epsilon/B_{\text{conv}}$  の値

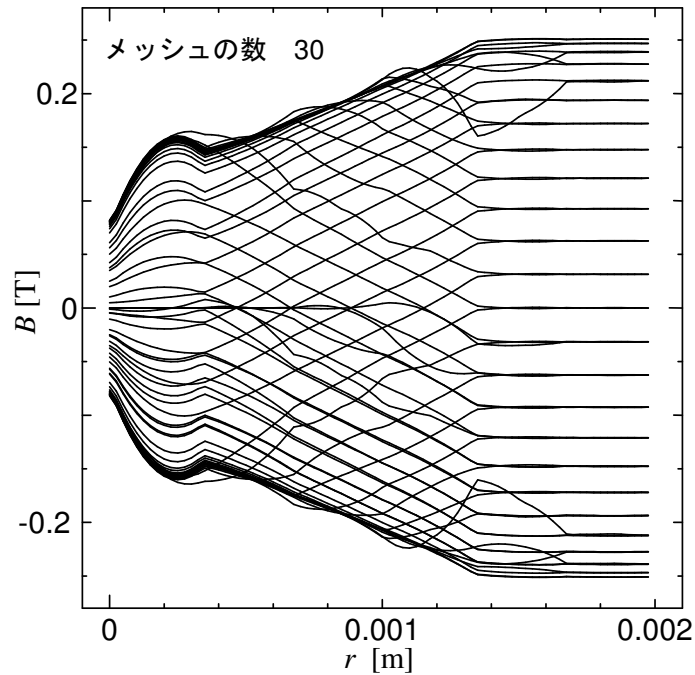


図 3.9: メッシュの数 30 における B の分布

図 3.9–3.14 より、メッシュの数が増加するに従ってグラフがきれいに表示されていくことが確認できる．概形だけを見ていくとメッシュの数が 60 あれば、超伝導体中の  $B$  の動きはメッシュの数が 400 の場合に比べてもきれいに表示されていると考えられる．図 3.15、3.15 より、 $\theta = \pi/2$  rad に比べると  $\theta = 2\pi$  rad の方が一致度は低いと考えられる．これは  $\sigma$  の収束度と同様の理由が考えられる．

図 3.17、3.18 より  $H_m > H_p$  に比べ  $H_m < H_p$  の方が一致度が低いと考えられる．これは  $H_m$  が低いと相対的にグラフの傾きが大きくなるため、メッシュの数が多く必要になるのではないかと考えられる．

また、図 3.15–3.18 よりメッシュの数の二桁目の値が偶数のときの方が良く一致していると考えられる．これよりメッシュの切り方によってはメッシュの数が少なくてもより一致することが分かる．また、 $H_m > H_p$  の場合メッシュの数が 60 程度でも十分であると考えられる． $H_m < H_p$  の場合メッシュの数が 300 程度あるとよいと考えられる．

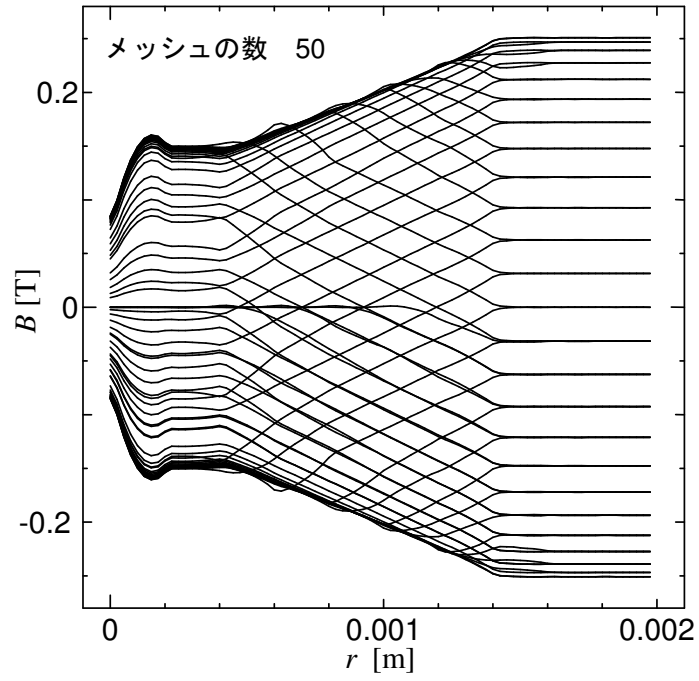


図 3.10: メッシュの数 50 における  $B$  の分布

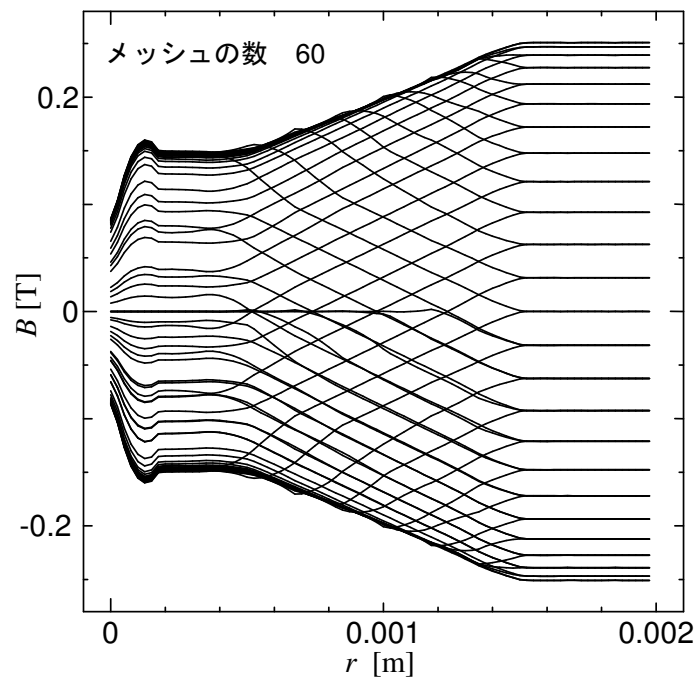


図 3.11: メッシュの数 60 における  $B$  の分布

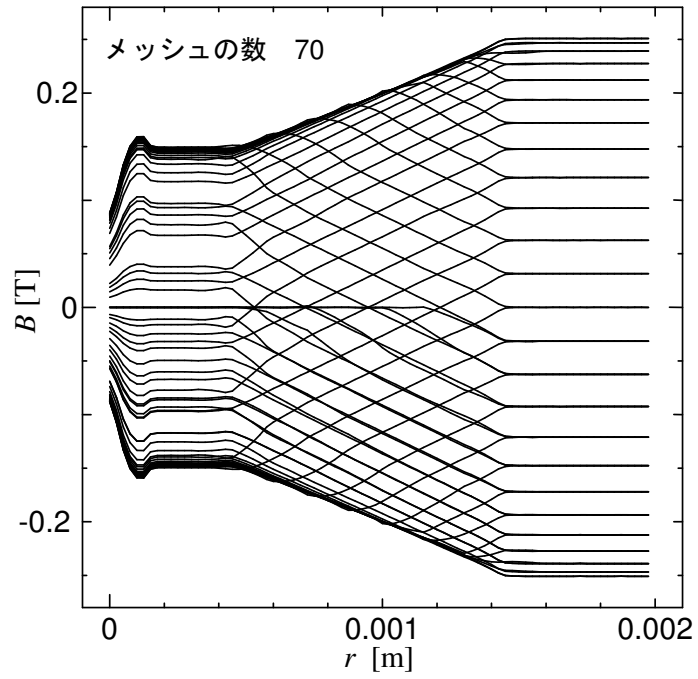


図 3.12: メッシュの数 70 における  $B$  の分布

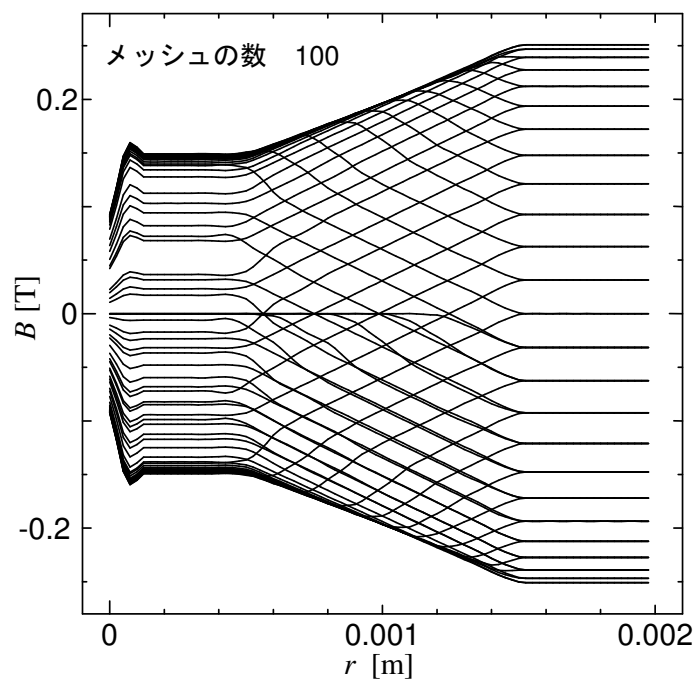


図 3.13: メッシュの数 100 における  $B$  の分布

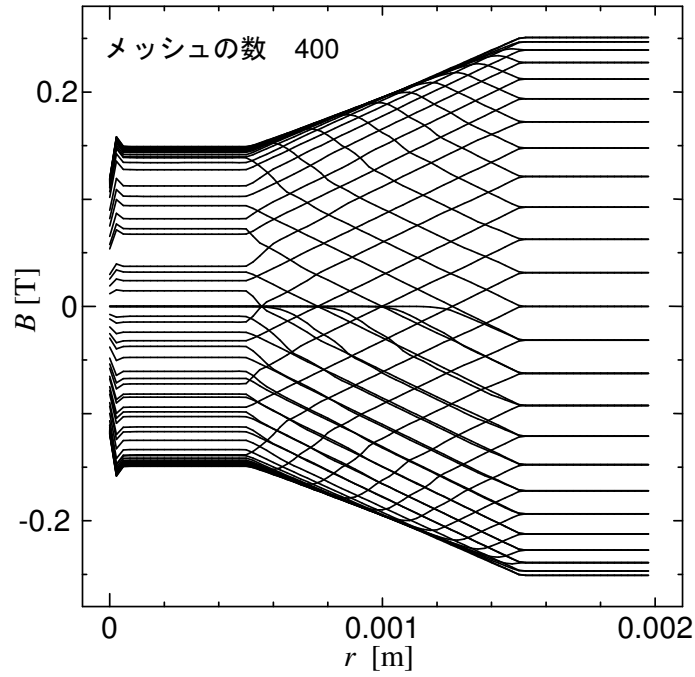


図 3.14: メッシュの数 400 における  $B$  の分布

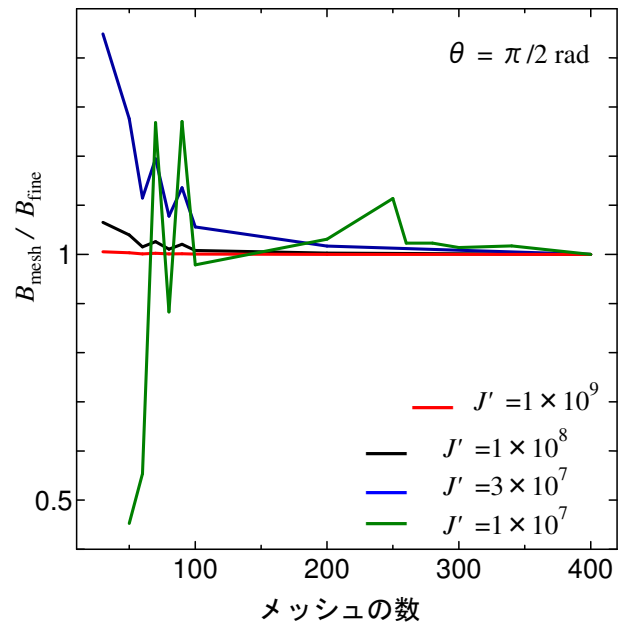


図 3.15:  $\theta = \pi/2$  においてメッシュの数を変化させることによる  $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$  の値

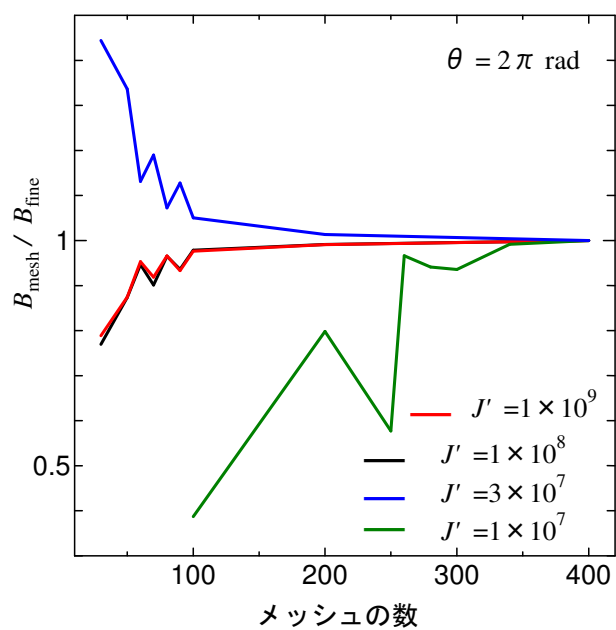


図 3.16:  $\theta = 2\pi$  においてメッシュの数を変化させることによる  $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$  の値

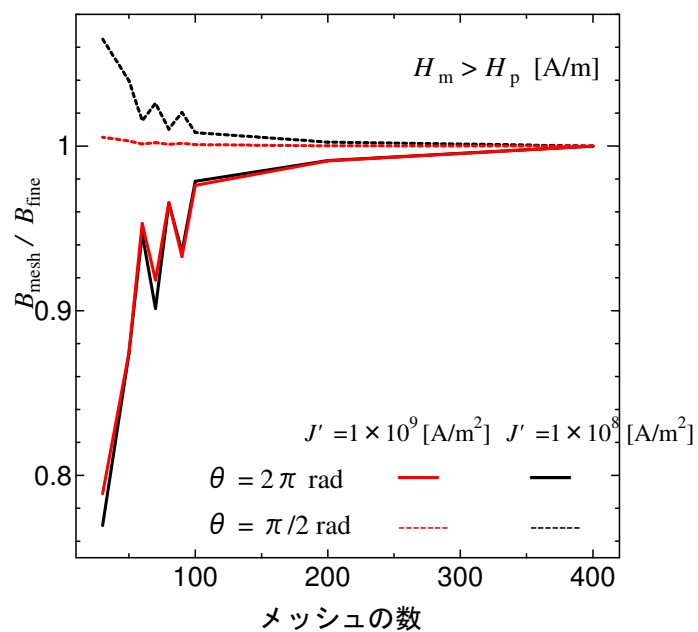


図 3.17:  $H_m > H_p$  においてメッシュの数を変化させることによる  $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$  の値

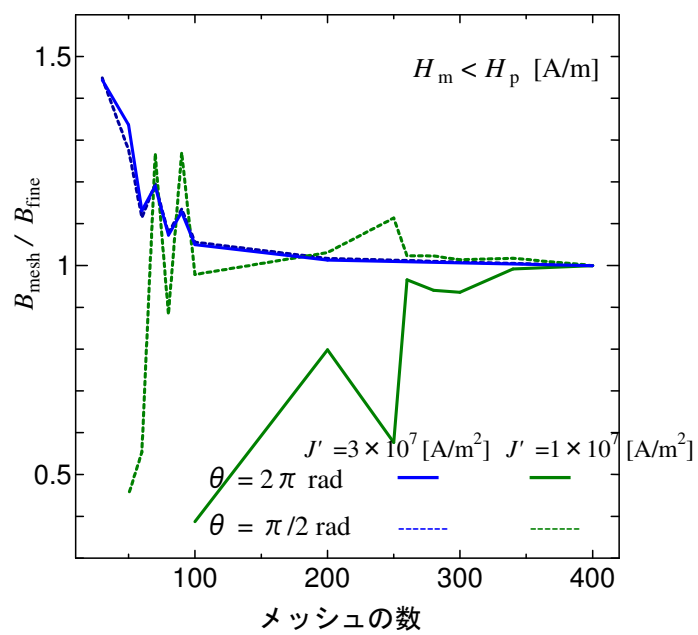


図 3.18:  $H_m > H_p$  においてメッシュの数を変化させることによる  $B_{\text{mesh}}/B_{\text{fine}}$  の値



## 第4章 まとめ

超伝導体内の電磁現象を有限要素法を用いて数値解析を行うために、FreeFem++に超伝導体特有の特性である電流-電圧特性の強い非線形性を組み込み、超伝導体のモデルを作成した。また、得られた値から超伝導体内の磁束密度  $B$  の分布を求め、それを基に  $M$  を求め、さらにそれを基に交流損失密度  $W$  を求めた。また、 $n$  値の変更、 $\sigma$  の収束度の変更、メッシュ数の変更を行い、どのような影響が受けるかを調査した。その結果以下のことが分かった。

FreeFem++では汎用性の高い軸対称三次元場を解けないが、軸対称三次元場の支配方程式を弱形式に変換することで実現可能となる。

有限要素法から得られた  $A$  より超伝導体内の  $B$  の分布を得ることができ、理論値と比較を行った。その結果傾きが一定とならなかったが、メッシュの数を増加することにより多少の改善ができた。また、理論値と比べると傾きが緩やかだったが、 $n$  値を変更することにより改善が出来た。また、超伝導体の内側に近づくほど傾きが小さくなったが、これは時間による損失ではないかと予想する。今後の課題として内側に近づくにつれて傾きが小さくなる原因の調査が挙げられる。また、 $B$  の分布から  $M$  を得ることができ、理論値と比較を行った。マイナー曲線では理論値とほぼ同様の結果を得ることができたが、メジャー曲線では値が一定にならなかった。こちらもメッシュの数を増加することにより多少の改善が出来た。また、 $M$  から  $W$  を得ることができ、理論値と比較を行った。 $H_e < H_p$  の場合と  $H_e > H_p$  の場合によって  $W$  の値が変化する。ここでは  $H_p = 1 \times 10^5$  となる。ここで、 $H_e < 1 \times 10^5$  A/m での傾きは理論値では約 2.33、計算値では約 2.16 となった、また、 $H_e > 1 \times 10^5$  A/m での傾きは理論値では約 1.04、計算値では約 1.07 となった、一般的な理論値では  $H_e < 1 \times 10^5$  A/m での傾きは 3、 $H_e > 1 \times 10^5$  A/m での傾きは 1 となるはずだが、理論値での値が異なるのは台形法による積分の近似の際の誤差または、今回は円筒形を用いたからだと考えられる。また、 $M$  と  $W$  のどちらも  $B$  の分布を積分した値だから  $B$  の分布と同様の結果となったと考えられる。

次に  $n$  値を変更した結果、 $n$  が小さいほど曲線が滑らかになった。また、大きいほど理論値に近づいた。曲線が滑らかになったのは、電流-電圧特性において発生電圧の変化の幅が、小さくなったため一つの要素ごとに得られる情報が多くなったからだと考えられる。また、 $n$  を大きくすると理論値に近づいたのは、Bean-London モデルは  $n$  値モデルの  $n$  が  $\infty$  になったモデルだからだと考えられる。これらのことより、 $n$  値モデルを上手く実装出来ていることが確認できた。

$\sigma$  の収束度の変更をした結果、収束の基準値  $\varepsilon = 10^{-6}$  で収束したと考えることが出来る． $H_m < H_p$  の場合メッシュの数が 300 程度あるとよいと考えられる．また、グラフの精度を上げるにはメッシュの切り方も重要であり、今回の値の場合メッシュの数の二桁目が偶数のほうが値が良いことが分かった．しかし、 $f = 10 \text{ Hz}$  で  $D = 1.59 \times 10^{-5} \text{ m}$  のため、これより良い精度がだったからではないかと考えられるため、他の位置や、時間、パラメータなどまだ試行していない条件によっては収束する値が変わるのではないかと考えられる．

メッシュの数を変更した結果、 $H_m > H_p$  の場合メッシュの数は 60 程度で十分に収束すると考えることが出来る．しかし、 $\sigma$  の収束度と同様のことが考えられるため、今後の課題として様々な条件で試行することが挙げられる．また、 $\sigma$  とメッシュの数を同時に変更することによってどのような影響を受けるかを調査することも挙げられる．

## 謝辞

本研究を行うにあたり、小田部荘司教授に多大なるご指導、助言を頂き、深く感謝しております。また、様々な助言やご指導、ご協力をして頂いた松下照男教授、木内勝准教授に深く感謝いたします。そして、研究に詰まってしまった際に、再び超伝導体の基礎を根気よく教えていただくなど、様々なご指導を頂いた谷川潤弥さん、村上晃司さんをはじめ研究室内外でお世話になりました松下研究室、小田部研究室、木内研究室所属の皆様にも深く感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 本庄昇一、「高温超伝導ケーブル用スパイラル導体での交流損失数値解析」、電学論 B、Vol. 120 No. 11(2000)
- [2] 松下照男、「—新電磁気学-電気・磁気学の新しい体系の確立—」、コロナ社、1994 年
- [3] 松下照男、「磁束ピンニングと電磁現象、産業図書」、2004 年
- [4] 筒井喜平、「有限要素法による磁場解析」、<http://computation.cside.com/mag-index.html>
- [5] 「有限要素法特論」、<http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003/01.pdf>
- [6] 「FreeFem++ Home page (20-janvier-2010)」、<http://www.freefem.org/ff++/>